Numeri PARI

Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA

Appello del 18 giugno 2024

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

(1) Data la funzione $g(x) = \log x \cdot \dfrac{\cos(2\log x)}{x \operatorname{sen}^3(2\log x)}$,

a) determinarne il dominio D_g, specificando se è un intervallo di $\mathbb{R}$;

b) dire se g è integrabile o localmente integrabile secondo Riemann in D_g, motivando esaurientemente la risposta;

c) utilizzando un noto teorema (quale?), verificare che la restrizione di g ad un qualunque intervallo $I \subset D_g$ è dotata di primitiva; calcolare, quindi, la generica primitiva di g effettuando la sostituzione $2\log x = t$ e e successivamente integrando per parti $\left(\textit{Sugg. Si noti che } D \operatorname{cotg}^2 t = \dfrac{-2\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\right)$.

(2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \log(\cos^2 x + \cos x - 1)}{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(3x)) - \operatorname{tg}(3x)}.$$

(3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = -xe^{1/x^2}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico. Dire, inoltre, se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $x_0 = 0$ ed, in caso positivo, se tale prolungamento è ivi derivabile.

(4) Data la funzione

$$f(x,y) = xe^{-\frac{x^2}{2}+y^2},$$

determinarne il dominio D_f, calcolare le derivate parziali prime e seconde e dire quindi se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di ~~tre~~ 2 ore.

1°) Poiché $\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, deve essere $x > 0 \wedge 2\log x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ovvero $x > 0 \wedge x \neq e^{\frac{\pi}{2}\cdot k}$ $(k \in \mathbb{Z})$. In definitiva $D_g = \{x > 0 \mid x \neq e^{\frac{\pi}{2}\cdot k}\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$ e dunque D_g <u>non</u> è un intervallo e g <u>non</u> è integrabile secondo Riemann (lo è localmente, essendo continua).

Se I è un intervallo incluso in D_g, $g_{|I}$ è dotata di primitive in virtù del teorema di Torricelli-Barrow; posto $2\log x = t$, si ha $x = e^{\frac{t}{2}}$ e pertanto $dx = \frac{e^{t/2}}{2}\,dt$.

Sostituendo si ha:

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{t}{2}\cdot\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t\cdot \cancel{e^{t/2}}}\cdot\frac{\cancel{e^{t/2}}}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int t\cdot\frac{\cos t}{\operatorname{sen}^3 t}\,dt \overset{\text{(per parti)}}{=} \frac{1}{4}\int t\cdot D\left(-\frac{\operatorname{cotg}^2 t}{2}\right)dt = -\frac{1}{8}t\cdot\operatorname{cotg}^2 t +$$

$$\frac{1}{8}\int \operatorname{cotg}^2 t\,dt = -\frac{1}{8}t\cdot\operatorname{cotg}^2 t + \frac{1}{8}\int\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = -\frac{1}{8}t\cdot\operatorname{cotg}^2 t + \frac{1}{8}\cdot\int\frac{1-\operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt = -\frac{1}{8}t\cdot\operatorname{cotg}^2 t -$$

$$\frac{1}{8}\operatorname{cotg} t - \frac{1}{8}t + c = -\frac{1}{4}\log x\cdot\operatorname{cotg}^2(2\log x) - \frac{1}{8}\operatorname{cotg}(2\log x) - \frac{1}{4}\log x + c,$$

e questa è l'espressione della generica primitiva di g in ogni intervallo $I \subset D_g$.

2°) Il limite è nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; si ha:

- $\log\overbrace{(\cos^2 x + \cos x - 1)}^{\to 1} \simeq \cos^2 x + \cos x - 2 = (\cos x + 2)(\cos x - 1) \simeq -\frac{3}{2}x^2$,
- $\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(3x)) - \operatorname{tg}(3x) \simeq -\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3(3x) \simeq -\frac{9}{2}x^3$,

per $x \to 0$,

e pertanto il limite assegnato è uguale al $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{3}{2}x^3}{-\frac{9}{2}x^3} = \dfrac{1}{3}$.

3°) Studiare la seguente funzione:

$x \to f(x) = -x e^{1/x^2}$

Insieme di definizione $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f dispari.

$f(x)>0 \iff x \in]-\infty, 0[$

$f(x)=0 \iff x \in \emptyset$

$f(x)<0 \iff x \in]0, +\infty[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]-\infty, 0[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati // // // //

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]0, +\infty[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) + x = \lim_{x \to \pm\infty} x(1 - e^{1/x^2}) = \lim_{x \to \pm}$ ... $= \{1 - e^{1/x^2} \simeq -\frac{1}{x^2}$ ...

Equazioni degli asintoti del grafico di f: $r: y = -x$ asintoto obliquo a dx ed a sx; $s: x = 0$ asintoto verticale a dx ed a sx.

$f'(x) = e^{1/x^2} \cdot \left(\frac{2}{x^2} - 1\right) \quad \forall x \in D_f$;

$f'(x)>0 \iff x \in]-\sqrt{2}, 0[\cup]0, \sqrt{2}[$

$f'(x)=0 \iff x = \pm\sqrt{2}$

$f'(x)<0 \iff x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f // // // // //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $[-\sqrt{2}, 0[$, $]0, \sqrt{2}]$

Intervalli in cui f è costante // // // // //

Intervalli un cui f è strettamente decrescente $]-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty[$

Punti di minimo o di massimo relativo per f $x_1 = -\sqrt{2}$ pto di min locale, $x_2 = \sqrt{2}$ pto di max locale, $f(\pm\sqrt{2}) = \mp$

Punti di minimo o di massimo assoluto per f // // // // //

$f''(x) = -e^{1/x^2} \cdot \left(\frac{2x^2+4}{x^5}\right) \quad \forall x \in D_f$;

$f''(x)>0 \iff x \in]-\infty, 0[$

$f''(x)=0 \iff x \in \emptyset$

$f''(x)<0 \iff x \in]0, +\infty[$

Intervalli in cui f è convessa $]-\infty, 0[$

Intervalli in cui f è concava $]0, +\infty[$

Punti di flesso per f // // // // //

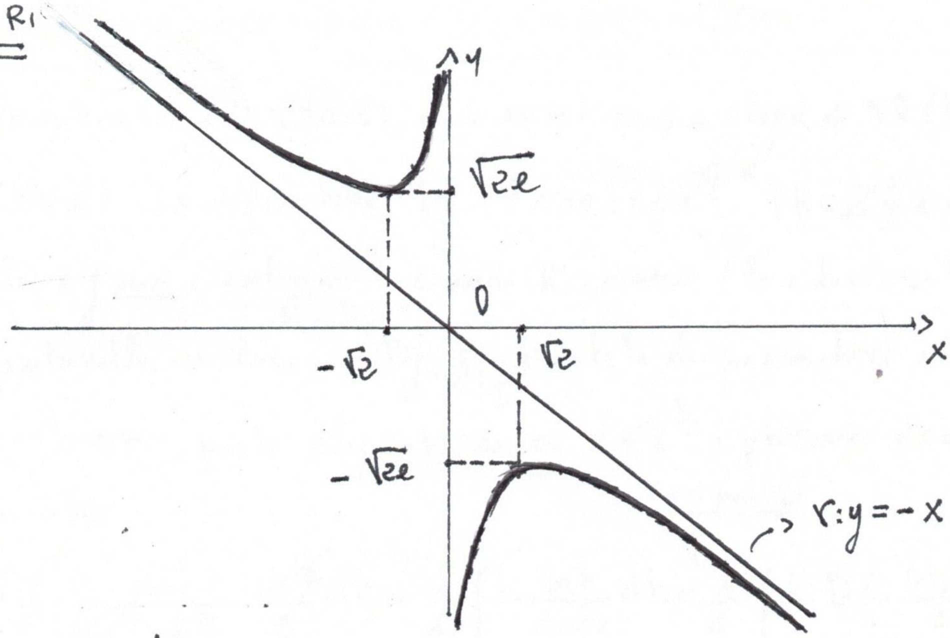
f è biunivoca (iniettiva)? NO

Indicare l'insieme dei valori di f: $]-\infty, -\sqrt{2e}] \cup [\sqrt{2e}, +\infty[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

NUMERI PARI



$(-\frac{1}{x^2}) = 0;$

$\infty\};$ La funzione __non__ è prolungabile per continuità in 0.

4°)

Si ha $D_f = \mathbb{R}^2$; in ogni $(x,y) \in D_f$ risulta

$$f_x(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}+y^2} \cdot (1-x^2), \quad f_y(x,y) = 2xy\, e^{-\frac{x^2}{2}+y^2},$$

e pertanto f è differenziabile perché dotata di derivate parziali prime continue (in realtà $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$). Si ha $\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{0}$ in $A = (1,0)$ e $B = (-1,0)$. Inoltre in ogni $(x,y) \in D_f$ si ha

$$f_{xx}(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}+y^2}(x^3-3x), \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}+y^2}(2y-2x^2y), \quad f_{yy}(x,y) = e^{-\frac{x^2}{2}+y^2} \cdot (2x+4xy^2)$$

e pertanto

$$\det H_f(1,0) = \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{e}} \end{pmatrix} = -\frac{4}{e} < 0 \Rightarrow A = (1,0) \text{ è } \underline{\text{pto di sella}};$$

$$\det H_f(-1,0) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{e}} \end{pmatrix} = -\frac{4}{e} < 0 \Rightarrow B = (-1,0) \text{ è } \underline{\text{punto di sella}}.$$

Si conclude che f __non__ ha estremanti locali.

Numeri DISPARI
Prova scritta di Matematica per l'Economia - CdL Triennale in EA
Appello del 18 giugno 2024

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *

(1) Data la funzione $g(x) = \log x \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(\log x)}{x\cos^3(\log x)}$,

a) determinarne il dominio D_g, specificando se è un intervallo di $\mathbb{R}$;

b) dire se g è integrabile o localmente integrabile secondo Riemann in D_g, motivando esaurientemente la risposta;

c) utilizzando un noto teorema (quale?), verificare che la restrizione di g ad un qualunque intervallo $I \subset D_g$ è dotata di primitiva; calcolare, quindi, la generica primitiva di g effettuando la sostituzione $\log x = t$ e successivamente integrando per parti $\big($*Sugg. Si noti che* $D\,\mathrm{tg}^2\, t = \dfrac{2\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\big)$.

(2) Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) - \mathrm{tg}(\operatorname{sen}(2x))}{x\log(3\cos^2 x - \cos x - 1)}.$$

(3) Studiare la seguente funzione

$$f(x) = xe^{-1/x^2}$$

e tracciarne approssimativamente il grafico. Dire, inoltre, se la funzione è prolungabile per continuità nel punto $x_0 = 0$ ed, in caso positivo, se tale prolungamento è ivi derivabile.

(4) Data la funzione

$$f(x, y) = \log(x + y) - y - \frac{x^3}{3},$$

determinarne il dominio D_f, calcolare le derivate parziali prime e seconde e dire quindi se f è differenziabile, giustificando esaurientemente la risposta; individuare, infine, gli eventuali punti di estremo locale.

Prova scritta di Met. Eco. del 18/06/2024 - CdL in EA NUMERI DISPARI

Per lo svolgimento di questa prova è concesso un tempo massimo di ~~tre~~ 2 ore.

1°) Poiché $\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, deve essere $x > 0 \wedge \log x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ovvero $x > 0 \wedge x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$. In definitiva $D_g = \{x > 0 \mid x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}\ \forall k \in \mathbb{Z}\}$ e dunque D_g non è un intervallo e g non è integrabile secondo Riemann (lo è localmente, essendo continua). Se I è un intervallo incluso in D_g, $g_{|I}$ è dotata di primitive in virtù del teorema di Torricelli-Barrow; posto $\log x = t$, si ha $x = e^t$ e pertanto $dx = e^t dt$. Sostituendo si ha:

$$\int g(x)\,dx = \int t \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cancel{e^t} \cdot \cos^3 t} \cdot \cancel{e^t}\,dt = \int t \cdot \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt \underset{\text{(per parti)}}{=} \int t \cdot D\left(\frac{\operatorname{tg}^2 t}{2}\right) dt = \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 t - \frac{1}{2}\int \operatorname{tg}^2 t\,dt =$$

$$\frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 t - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 t - \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{t}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 t - \frac{1}{2}\operatorname{tg} t + \frac{1}{2} t + c =$$

$\frac{\log x}{2} \cdot \operatorname{tg}^2(\log x) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}(\log x) + \frac{1}{2}\log x + c$, e questa è l'espressione della generica primitiva di g in ogni intervallo $I \subset D_g$.

2°) Il limite è nella forma di indecisione $\left[\frac{0}{0}\right]$; si ha:

- $\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{tg}(\operatorname{sen}(2x)) \simeq -\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(2x) \simeq -\frac{8}{3}x^3$, per $x \to 0$,
- $\log \underbrace{(3\cos^2 x - \cos x - 1)}_{\to 1} \simeq 3\cos^2 x - \cos x - 2 = (3\cos x + 2)(\cos x - 1) \simeq -\frac{5}{2}x^2$,

e pertanto il limite assegnato è uguale al $\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{8}{3}x^3}{-\frac{5}{2}x^3} = \frac{16}{15}$.

3°) Studiare la seguente funzione:

$x \to f(x) = x e^{-1/x^2}$

Insieme di definizione $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f dispari.

$f(x)>0$ $\Leftrightarrow x \in]0,+\infty[$

$f(x)=0$ $\Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f(x)<0$ $\Leftrightarrow x \in]-\infty,0[$

Intervalli in cui il grafico di f è al disopra dell'asse delle x $]0,+\infty[$

Punti comuni al grafico di f ed agli assi coordinati // // // //

Intervalli in cui il grafico di f è al disotto dell'asse delle x $]-\infty,0[$

Limiti significativi per f:

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x=\lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-1/x^2}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty} x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0$;

Equazioni degli asintoti del grafico di f: $r: y = x$ asintoto obliquo a dx ed a sx; $\forall \left\{ e^{-1/x^2}-1 \simeq -\frac{1}{x^2} \text{ se } x\to\pm\infty \right.$

$f'(x)= e^{-1/x^2}\cdot\left(1+\frac{2}{x^2}\right)$ $\forall x \in D_f$; $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$;

$f'(x)>0$ $\forall x \in D_f$

$f'(x)=0$ $\Leftrightarrow x \in \emptyset$

$f'(x)<0$ $\Leftrightarrow x \in \emptyset$

Punti angolosi o cuspidali del grafico di f // // // // //

Intervalli in cui f è strettamente crescente $]-\infty,0[$, $]0,+\infty[$

Intervalli in cui f è costante // // // // //

Intervalli un cui f è strettamente decrescente // // // // //

Punti di minimo o di massimo relativo per f // // // // //

Punti di minimo o di massimo assoluto per f // // // //

$f''(x)= e^{-1/x^2}\cdot\left(\frac{4-2x^2}{x^5}\right)$ $\forall x \in D_f$;

$f''(x)>0$ $\Leftrightarrow x \in]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]0,\sqrt{2}[$

$f''(x)=0$ $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$f''(x)<0$ $\Leftrightarrow x \in]-\sqrt{2},0[\cup]\sqrt{2},+\infty[$

Intervalli in cui f è convessa $]-\infty,-\sqrt{2}]$, $]0,\sqrt{2}]$

Intervalli in cui f è concava $[-\sqrt{2},0[$, $[\sqrt{2},+\infty[$

Punti di flesso per f $x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ con $f(\pm\sqrt{2})=\pm\sqrt{2/e}$

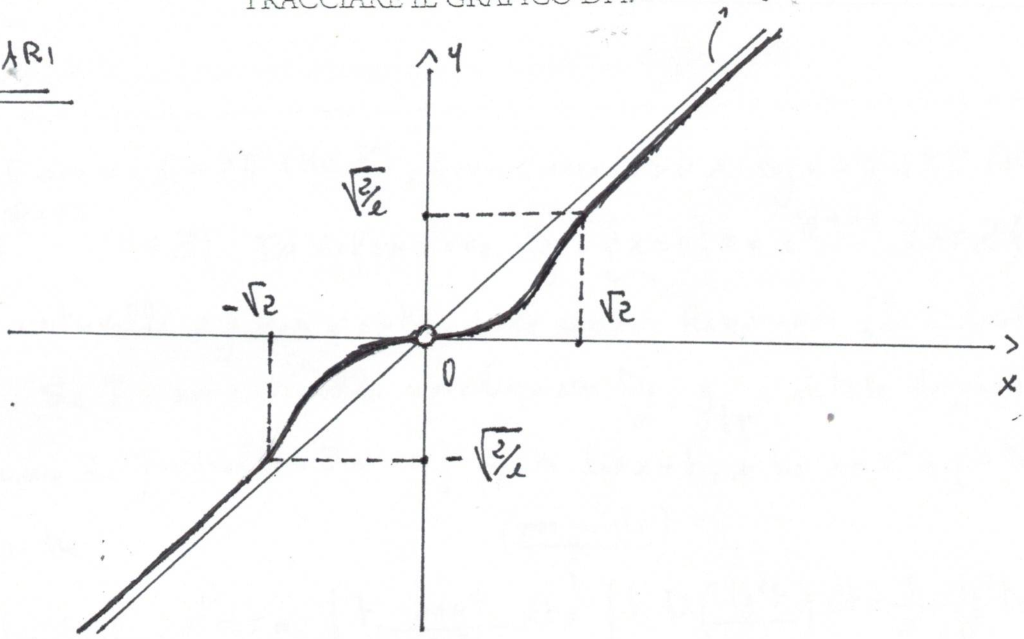
F è biunivoca (iniettiva)? SI

Indicare l'insieme dei valori di f: $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

Agli ultimi due quesiti conviene rispondere dopo aver tracciato il grafico di f.

TRACCIARE IL GRAFICO DI f.

NUMERI DISPARI



Poiché $\lim_{x\to 0} f(x)=0$, f è prolungabile per continuità in 0 e si pone $f(0)=0$; essendo poi $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, tale prolungamento è anche derivabile in 0 con $f'(0)=0$ ed ha in 0 un punto di flesso; si noti che il codominio del prolungamento di f è l'intero $\mathbb{R}$.

4°) Si ha $D_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>-x\}$ (= semipiano delimitato inferiormente dalla retta $y=-x$); in ogni $(x,y)\in D_f$ risulta

$$f_x(x,y)=\frac{1}{x+y}-x^2,\quad f_y(x,y)=\frac{1}{x+y}-1,$$

e pertanto f è differenziabile perché dotata di derivate parziali prime continue (in realtà $f\in C^\infty(D_f)$). Si ha $\vec{\nabla} f(x,y)=\vec{0}$ in $A=(1,0)$ $\in D_f$ e $B=(-1,2)$ $\in D_f$. Inoltre in ogni $(x,y)\in D_f$ si ha

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-1}{(x+y)^2}-2x,\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\frac{-1}{(x+y)^2},\quad f_{yy}(x,y)=\frac{-1}{(x+y)^2},$$

e pertanto

$$\det Hf(1,0)=\det\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=3-1=2>0,\quad f_{xx}(1,0)=-3<0 \Rightarrow A=(1,0)$$ è pto di max locale;

$$\det Hf(-1,2)=\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=-1-1=-2<0 \Rightarrow B=(-1,2)$$ è pto di sella.